8 ФУНКЦИЯНЫҢ НӨЛДЕРІ. ОҚШАУЛАНҒАН АЙРЫҚША НҮКТЕЛЕР

8.1 Функцияның нөлдері

Функцияның нөлдері

Егер $f(z_0)=0$ болса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ *функциясының нөлі (түбірі)* деп аталады.

$f(z)$ функциясы z_0 нүктесінде аналитикалық болсын.

Анықтама 22. Егер

$$f(z_0)=0, \quad f'(z_0)=0,..., f^{(n-1)}(z_0)=0, \quad f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

шарттары орындалса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ *функциясының* n *еселі (немесе* n *- ретті) нөлі* деп аталады.

Егер $n=1$ болса, онда z_0 нүктесі *жай (қарапайым) нөл* деп аталады.

Теорема 1. z_0 нүктесі осы нүктеде аналитикалық $f(z)$ функциясының n еселі нөлі болуы үшін z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында $f(z)$ функциясы $\varphi(z_0)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын және z_0 нүктесінде аналитикалық $\varphi(z)$ функциясы арқылы

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

түрінде өрнектелінуі қажетті және және жеткілікті.

8.2 Оқшауланған айрықша нүктелер

Анықтама 23. Егер z_0 айрықша нүктесінің қандай да бір аймағында $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінен басқа айрықша нүктесі болмаса, онда z_0 айрықша нүктесі $f(z)$ *функциясының оқшауланған айрықша нүктесі* деп аталады.

Егер айрықша нүктелер саны шектеулі болса, онда олар оқшауланған айрықша нүктелер болады.

Оқшауланған айрықша нүкте функцияның осы нүктедегі шегіне байланысты *түзетілетін, полюс* және *маңызды* деп үш түрге бөлінеді. Енді соларға тоқталайық.

z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын.

Анықтама 24. Егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ шегі тиянақты болса (яғни санға тең болса), онда $f(z)$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *түзетілетін (аласталатын) айрықша нүкте* деп аталады.

Анықтама 25. Егер

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

болса, онда $f(z)$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *полюс* деп аталады.

Теорема 2. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болуы үшін, оның

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

функциясының нөлі болуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама 26. Егер z_0 нүктесі $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ функциясы үшін n еселі нөл болса, онда $f(z)$ функциясының z_0 оқшауланған айрықша нүктесі *n еселі полюс* деп аталады.

$n=1$ жағдайында полюсті *қарапайым (жай)* деп атаймыз.

Теорема 3. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясы үшін n еселі полюс болу үшін z_0 нүктесінің қандай да бір аймағында $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінде аналитикалық және $\varphi(z_0)\neq 0$ шартын қанағаттандыратын $\varphi(z)$ функциясы арқылы

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$$

түрінде өрнектелінуі қажетті және жеткілікті.

Теорема 1 және Теорема 3 –тен келесі салдарды жазуға болады.

Салдар. Егер z_0 нүктесі:

1) $\varphi(z)$ функциясының «k» еселі нөлі;

2) $g(z)$ функциясының «n» еселі нөлі және $k<n$ болса, онда z_0 нүктесі $f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ функциясының $n-k$ еселі полюсі болады.

Анықтама 27: Егер $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ шегі жоқ болса, онда z_0 айрықша нүктесі $f(z)$ функциясының *маңызды (елеулі) айрықша нүктесі* деп аталады.

$z=a$ нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған айрықша нүктесі болсын.

Онда $z=a$ нүктесінің қандай да бір $0<|z-a|<R$ тесік аймағында $f(z)$ аналитикалық функция болады да, осы аймақта $(z-a)$ айырмасының дәрежелері бойынша Лоран қатарына жіктеледі.

Енді, функцияның оқшауланған айрықша нүктесінің қандай түрге жататынын функцияның осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуін пайдаланып анықтауға мүмкіндік беретін келесі үш теореманы келтірейік.

Теорема 4. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының түзетілетін айрықша нүктесі болуы үшін $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуінің тек дұрыс бөліктен тұруы, яғни

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+...+c_n(z-a)^n+...,$$

түрінде жазылуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 5. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының n еселі полюсі болуы үшін $f(z)$ функциясының z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуінде $c_{-n}\neq 0$ және кез келген натурал k үшін $c_{-(n+k)}=0$ болуы, яғни жіктелудің

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+...+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+...,\quad c_{-n}\neq 0$$

түрінде жазылуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 6. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды айрықша нүктесі болуы үшін $c_{-n}\neq 0$ теңсіздігінің n нөмірінің шексіз көп мәндері үшін орынды болуы, яғни Лоран қатарының негізгі бөлігінің мүшелерінің саны шектеусіз болуы қажетті және жеткілікті.